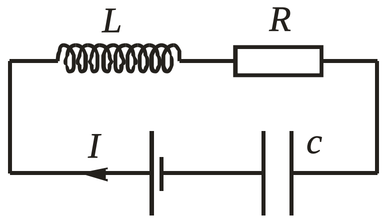
Семинар 13. Электрические цепи. Метод комплексных амплитуд

Краткая теория



$\varepsilon=\varepsilon_0 \cos\omega t$

$$\begin{cases} L\dot{I}+IR+\dfrac{q}{c}=\varepsilon_0\cos\omega t \\ I=\dfrac{dq}{dt} \end{cases} \Rightarrow \ddot{q}+2\dot{q}\frac{R}{2L}+\frac{1}{Lc}q=\frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t$$

$$q=A\cos(\omega t+\varphi)\to Ae^{i(\omega t+\varphi)}=Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}=\tilde{A}e^{i\omega t}$$

$$I=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=A\omega\cos(\omega t+\varphi+\pi/2)=\tilde{I}e^{i\omega t}$$

$$\dot{I}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=A\omega^2\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

$$\left[\begin{array}{l} U_c=(A/c)e^{i\varphi}e^{i\omega t}=\dfrac{I_0}{i\omega c}e^{i\omega t} \\ U_R=A\omega Re^{i(\varphi+\pi/2)}e^{i\omega t}=\left(Ai\omega e^{i\varphi}\right)Re^{i\omega t}=I_0Re^{i\omega t} \\ U_L=LA\omega^2e^{i(\varphi+\pi)}e^{i\omega t}=I_0i\omega Le^{i\omega t} \\ \varepsilon=\varepsilon_0e^{i\omega t} \end{array}\right.$$

$$L\dot{I}+IR+\frac{q}{c}=\varepsilon_0\cos\omega t$$

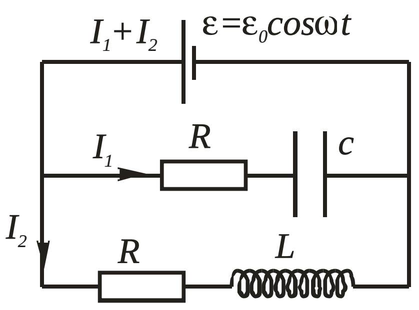
$$I_0i\omega L+I_0R+\frac{I_0}{i\omega c}=\varepsilon_0\Rightarrow I_0=\frac{\varepsilon_0}{i\omega L+R+\dfrac{1}{i\omega c}}$$

$$\left[\begin{array}{l} U_c=(A/c)e^{i\varphi}e^{i\omega t}=\dfrac{I_0}{i\omega c}e^{i\omega t} \\ U_R=A\omega Re^{i(\varphi+\pi/2)}e^{i\omega t}=\left(Ai\omega e^{i\varphi}\right)Re^{i\omega t}=I_0Re^{i\omega t} \\ U_L=LA\omega^2e^{i(\varphi+\pi)}e^{i\omega t}=I_0i\omega Le^{i\omega t} \\ \varepsilon=\varepsilon_0e^{i\omega t} \end{array}\right.$$

Задачи с решениями

12.31.

12.32.



$$\begin{cases} I_1R+\dfrac{I_1}{iwc}=e_0 \\ I_2R+I_2iwL=e_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1=\dfrac{e_0iwc}{1+iwRc} \\ I_2=\dfrac{e_0}{R+iwL} \end{cases}$$

$$I_{1\text{действительный}}=|I_1|\cos(wt+Arg(I_1))$$

$$I=I_1+I_2=\frac{e_0iwc}{1+iwRc}+\frac{e_0}{R+iwL}$$

$$\Delta j=Arg\left(\frac{I}{e_0}\right)=Arg\left(\frac{i2wRc+1-w^2Lc}{(1+iwRc)(R+iwL)}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} Z_1=|Z_1|e^{iArgZ_1} \\ Z_2=|Z_2|e^{iArgZ_2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}e^{i(ArgZ_1-ArgZ_2)}$$

$$\frac{(i2wRc+1-w^2Lc)(1-iwRc)(R-iwL)}{(1+w^2R^2c^2)(R^2+w^2L^2)}=\frac{(i2wRc+1-w^2Lc)(R-w^2RLc-iwL-iwR^2c)}{(1+w^2R^2c^2)(R^2+w^2L^2)}=$$

$$=\frac{\left[R(1-w^2Lc)^2+2w^2Rc(L+R^2c)\right]+iw(1-w^2Lc)(R^2c-L)}{(1+w^2R^2c^2)(R^2+w^2L^2)}$$

$$tg\Delta j=\frac{w(1-w^2Lc)(R^2c-L)}{R(1-w^2Lc)^2+2w^2Rc(L+R^2c)}=0$$

$$\left[\begin{array}{l} w^2Lc=1 \\ L=R^2c \end{array}\right.$$

Литература

Н.В. Нетребко, И.П. Николаев, М.С. Полякова, В.И. Шмальгаузен. Электричество и магнетизм. Практические занятия по физике для студентов-математиков. Часть III. Москва: Макс Пресс, 2006 г.

12.18.

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{dq}{dt} \\ \dfrac{q}{c} - I_2 R_2 = 0 \\ (I_1 + I_2)R_1 + I_2 R_2 - e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{dq}{dt} \\ \dfrac{q}{c} - \dfrac{e - \dot{q}R_1}{R_1 + R_2} R_2 = 0 \\ I_2 = \dfrac{e - I_1 R_1}{R_1 + R_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{dq}{dt} R_1 R_2 c = e c R_2 - q(R_1 + R_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\left[e c R_2 - q(R_1 + R_2)\right]}{e c R_2 - q(R_1 + R_2)} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 c} dt \Rightarrow U = \frac{e R_2}{R_1 + R_2}\left[1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 c} t}\right]$$